ラプラス変換の性質

数理工学 第13回

小林 健/ Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025年11月20日

目次

目次

ラプラス変換の定義 (復習)

定義 (ラプラス変換; 前回の資料の再掲)

区間 $(0,\infty)$ 上で定義された実数値関数 $f(t)$ に対し,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

と定義される関数 $F(s)$ を $f(t)$ の**ラプラス変換**という.

- 上の定義において, $f(t)$ を原関数, $F(s)$ を像関数という.
- ラプラス変換を表す記号として $F(s)$ を

$$L(f(t)) \quad \text{または} \quad L(f)$$

と書くことがある.

- 前回は基本的な関数に着目して，そのラプラス変換を具体的に計算した．
- 今回はラプラス変換そのものの性質を見る.

ラプラス変換の基本性質：線形則

2 つの関数 $f(t)$, $g(t)$ に対し，それぞれのラプラス変換を次のように表す:

$$L(f(t)) = F(s), \quad L(g(t)) = G(s).$$

定理 (基本性質その 1：線形則)

関数 $f(t)$, $g(t)$ に対し，任意の実数 $a, b \in \mathbb{R}$ で次が成り立つ:

$$L(af(t) + bg(t)) = aF(s) + bG(s).$$

💡 関数の線形結合のラプラス変換は，ラプラス変換の線形結合と等しい．

証明　積分の線形性から，

$$\begin{aligned} L(af(t) + bg(t)) &= \int_0^\infty e^{-st}(af(t) + bg(t))dt \\ &= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt \\ &= aF(s) + bG(s). \quad \square \end{aligned}$$

ラプラス変換の基本性質: 相似則

定理 (基本性質その 2: 相似則)

関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とする. $a > 0$ を定数とすると, $f(at)$ のラプラス変換は

$$L(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

証明 置換積分を用いる.

- $\tau = at$ と変数変換すると, $d\tau = a\,dt$ であり,

$$\begin{aligned} L(f(at)) &= \int_0^\infty e^{-st} f(at)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau) \cdot \frac{1}{a}\, d\tau \\ &= \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right). \quad \square \end{aligned}$$

例題

$a > 0$ を定数とする. $L(\cos t) = \dfrac{s}{s^2+1}$ を用いて $L(\cos at)$ を求めよ:

- 相似則を用いて

$$
\begin{aligned}
L(\cos at) &= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \\
&= \frac{1}{a} \cdot \frac{\left(\frac{s}{a}\right)}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{s}{s^2 + a^2}.
\end{aligned}
$$

ラプラス変換の基本性質: 移動則

定理 (基本性質その 3: 移動則)

関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とする. $a > 0$ を定数とすると, $e^{at}f(t)$ のラプラス変換は

$$L(e^{at}f(t)) = F(s-a).$$

💡 原関数に指数関数を掛ける操作は, 像関数を平行移動させる操作に対応.

証明　ラプラス変換の定義より

$$\begin{aligned} L(e^{at}f(t)) &= \int_0^\infty e^{-st}(e^{at}f(t))\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt \\ &= F(s-a). \quad \square \end{aligned}$$

例題

$a, b > 0$ を定数とする. $L(\cos at) = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$ を用いて $L(e^{bt} \cos at)$ を求めよ.

- $F(s) = L(\cos at) = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$ として移動則を用いると,

$$L(e^{bt} \cos at) = F(s - b) = \frac{s - b}{(s - b)^2 + a^2}.$$

ラプラス変換の基本性質: 原関数の微分則

定理 (基本性質その 4: 原関数の微分則)

関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とする．このとき,

$$L\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) = sF(s) - f(0).$$

💡 原関数の微分は，像関数では s 倍する操作に (ほぼ) 対応．

証明　部分積分を用いて

$$\begin{aligned} L\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{d}{dt}f(t)\,dt \\ &= \Big[e^{-st}f(t)\Big]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = -f(0) + sF(s). \quad \square \end{aligned}$$

原関数の微分則 (高階の場合)

定理 (原関数の微分則; 高階の場合)

関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とする．このとき, n 階導関数のラプラス変換は

$$L\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

証明　帰納的に示す．

- $n=2$ として $\dfrac{d^2}{dt^2}f(t)$ のラプラス変換を求める．$g(t) = \dfrac{d}{dt}f(t)$, $G(s) = L(g(t))$ に対し

$$L\left(\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right) = sG(s) - g(0)$$
$$= s\Big(sF(s) - f(0)\Big) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

- これを繰り返せば一般の n 階の導関数のラプラス変換が求まる．□

ラプラス変換の基本性質：像関数の微分則

定理 (基本性質その 5：像関数の微分則)

関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とする．このとき，

$$L(-tf(t)) = \frac{d}{ds}F(s).$$

💡 像関数を微分する操作は，原関数に $-t$ を掛ける操作に対応．

証明　ラプラス変換の定義に従って右辺を計算すると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-st} f(t))\,dt \qquad \text{(微分と積分の順序を入れ替えた)} \\
&= \int_0^\infty e^{-st}(-tf(t))\,dt = L(-tf(t)). \qquad \square
\end{aligned}$$

例題

$a > 0$ を定数とする. $L(\sin at) = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$ を用いて $L(t \sin at)$ を求めよ.

- 像関数の微分則を用いると

$$L(t \sin at) = -L(-t \sin at) = -\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}.$$

目次

関数の合成積

定義 (合成積)

$[0,\infty)$ 上の 2 つの関数 $f(t)$, $g(t)$ に対し，$[0,\infty)$ 上の関数 $(f*g)(t)$ を

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

と定義する．このとき，$(f*g)(t)$ を $f(t)$ と $g(t)$ の**合成積**または**畳み込み**という．

例　$b>0$ を定数とした $\sin bt * \sin bt$ の計算．

$$\begin{aligned}
\sin bt * \sin bt &= \int_0^t \sin b(t-\tau)\sin b\tau\,d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t (\cos b(t-2\tau) - \cos bt)d\tau \qquad \left(\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2b}\sin b(t-2\tau) - \tau\cos bt\right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2b}(\sin bt - \sin(-bt)) - t\cos bt\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}\sin bt - t\cos bt\right).
\end{aligned}$$

合成積の性質

命題 (合成積の可換性)

合成積は可換である．すなわち，任意の $t \in [0, \infty)$ で

$$(f * g)(t) = (g * f)(t)$$

が成り立つ．

証明

- 合成積の定義における積分で，$u = t - \tau$ と変数変換すると $du = -1 d\tau$ であり，

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \\
&= \int_t^0 f(u)g(t-u)\cdot(-1)\,du \\
&= \int_0^t g(t-u)f(u)\,du = (g * f)(t).
\end{aligned}$$

合成積のラプラス変換

定理 (基本性質その 6: 合成積のラプラス変換)

関数 $f(t)$, $g(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $F(s)$, $G(s)$ とすると,

$$L(f*g) = F(s)G(s).$$

証明

- ラプラス変換の定義より

$$F(s)G(s) = F(s)\int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau}F(s)\,g(\tau)\,d\tau \tag{1}$$

- ここで,

$$\begin{aligned} e^{-s\tau}F(s) &= e^{-s\tau}\int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du \\ &= \int_0^\infty e^{-s(u+\tau)} f(u)\,du \\ &= \int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau)\,dt \qquad (t = u+\tau \text{と変数変換}). \end{aligned}$$

- よって式 (1) は次のように書ける:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \underbrace{\left(\int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau)\, dt\right)} g(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

- この積分はフビニの定理から積分の順序が交換可能.

  積分の順序を入れ替えて積分領域を適切に取り直せば (以下の図参照),

$$\text{式 (2)} = \int_0^\infty e^{-st} \underbrace{\left(\int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau\right)} dt = L(f * g). \quad \square$$

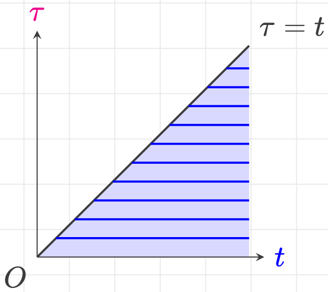

Figure: $t \to \tau$ の順に積分

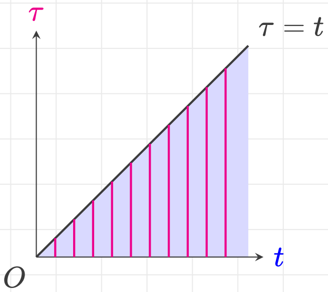

Figure: $\tau \to t$ の順に積分

例題

$f(t)=t,\ g(t)=e^{-t}$ とした場合の $L(f*g)$ を求めよ．なお

$$F(s)=L(t)=\frac{1}{s^2},\quad G(s)=L(e^{-t})=\frac{1}{s+1}.$$

- 合成積に関するラプラス変換から

$$L(f*g)=F(s)G(s)=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s^2(s+1)}.$$

- 合成積の定義から同様の結果が得られることを確認する．合成積の定義から

$$\begin{aligned}(f*g)(t)&=\int_0^t(t-\tau)e^{-\tau}\,d\tau\\&=t\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau-\int_0^t\tau e^{-\tau}\,d\tau\\&=t\left[-e^{-\tau}\right]_0^t-\left(\left[-\tau e^{-\tau}\right]_0^t+\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau\right)\\&=t(1-e^{-t})+te^{-t}+(e^{-t}-1)=e^{-t}+t-1.\end{aligned}$$

- 書き下した合成積のラプラス変換を求めると

$$
\begin{aligned}
L((f*g)(t)) &= L(e^{-t}+t-1) \\
&= L(e^{-t})+L(t)-L(1) \\
&= \frac{1}{s+1}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s} \\
&= \frac{s^2+(s+1)-s(s+1)}{s^2(s+1)} \\
&= \frac{1}{s^2(s+1)}
\end{aligned}
$$

であり, 先ほどの結果と一致する.

ラプラス変換の性質まとめ

線形則 $L(af(t) + bg(t)) = aF(s) + bG(s)$

相似則 $L(f(at)) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

移動則 $L(e^{at}f(t)) = F(s-a)$

原関数の微分則 $L\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) = sF(s) - f(0)$

$$L\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

像関数の微分則 $L(-tf(t)) = \frac{d}{ds}F(s)$

合成積のラプラス変換 $L(f * g) = F(s)G(s)$

まとめ

講義の振り返り

- ラプラス変換の基本的性質 (線形則，相似則，移動則，微分則)
- 合成積の定義とその性質
- 合成積のラプラス変換

自宅での復習

- 基本的性質の証明を確認する (特に微分則).
- 合成積の定義とその性質を理解する.