微分方程式

数理工学 第 9 回

小林 健/ Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025 年 11 月 06 日

目次

目次

微分方程式の導入

微分方程式とはなにか

- 未知関数の導関数を含む方程式を**微分方程式**という
  - 常微分方程式： 未知関数が 1 変数関数の微分方程式
  - 偏微分方程式： 未知関数が多変数関数の微分方程式
- 微分方程式：**局所的に成り立つ関係**を記述したもの

  $\rightsquigarrow$ 自然界や社会でおこる現象や法則を表現する数理モデルとしてよく使われる

微分方程式を解く動機

- 微分方程式 $\cdots$ **局所的な振る舞いに関する関係性**
- 微分方程式が解けると, **対象の大域的な性質・挙動が明らかになる**

  $\rightsquigarrow$ 現象や法則の理解に役立つ

微分方程式の例: 放射性元素の崩壊

放射性元素の崩壊過程のモデル化

- 放射性元素 X が崩壊して別の物質に変化する．時刻 t における X の量を $x(t)$ とする．
- 物理法則から, $a < 0$ を定数として $x(t)$ は次の微分方程式を満たす:

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t).$$

微分方程式の解

$$x(t) = Ce^{at} \quad (C \text{ は任意の定数})$$

$\rightsquigarrow$ 放射性物質の半減期が求められる

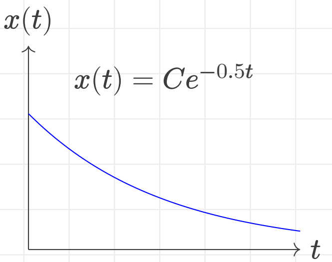

Figure: 放射性元素の崩壊過程

微分方程式の例: 物体の運動方程式

単振動のモデル化

- 質量 m の物体がばね定数 k のばねに接続されている.
- 物体が静止しているときの位置を原点, 時刻 t における物体の変位を $x(t)$ とする.
- 変位が $x(t)$ のとき, ばねにより物体には $-kx(t)$ の力が働く.
- 物理法則から, $x(t)$ は次の微分方程式を満たす:

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t).$$

微分方程式の解

$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

(C_1, C_2 は任意の定数)

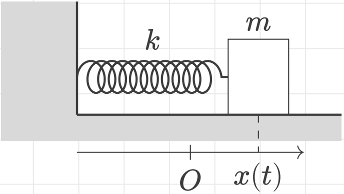

Figure: ばねに繋がれた物体の運動

微分方程式の例: 感染症の数理モデル

感染症の数理モデル (SIR モデル)

- 時刻 t におけるそれぞれの人数を次のように定義する:
  - $S(t)$: 未感染者 (感受性保持者) の人数 (susceptible)
  - $I(t)$: 感染者の人数 (infectious)
  - $R(t)$: 免疫保持者の人数 (recovered)
- これらが次の連立微分方程式を満たすとする:

$$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)I(t),$$
$$\frac{d}{dt}I(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t),$$
$$\frac{d}{dt}R(t) = \gamma I(t).$$

($\beta > 0, \gamma > 0$ は定数で, それぞれ感染率, 回復率という)

SIR モデルの数値例

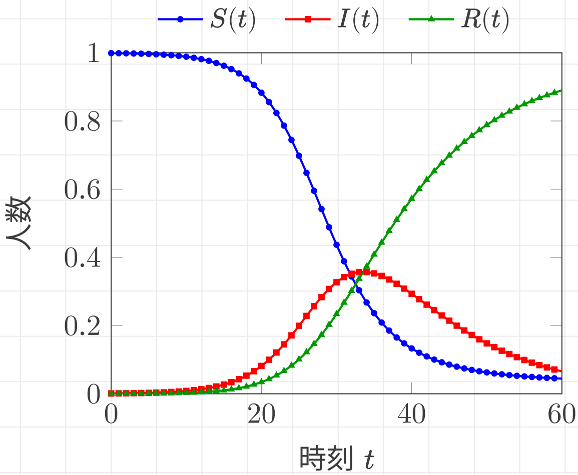

Figure: $\beta = 0.35, \gamma = 0.10$ の場合

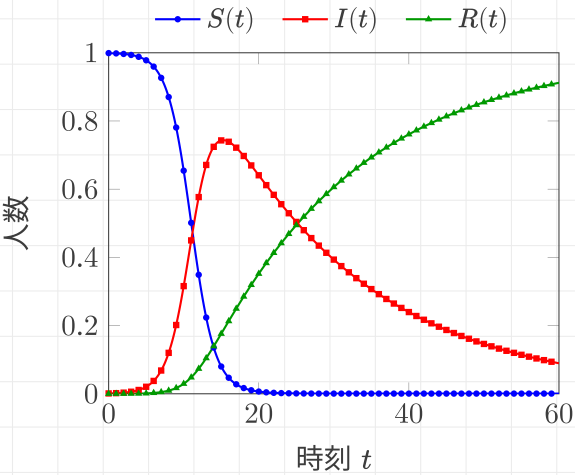

Figure: $\beta = 0.7, \gamma = 0.05$ の場合

微分方程式を用いた現象の解析

Step 1 対象を観察する，あるいは実験を通じて法則を見出し，
その法則を微分方程式として記述する (モデル化)

Step 2 得られた微分方程式を解く (求解)

Step 3 解が現実の現象を適切に再現しているか検証する (解の検証)

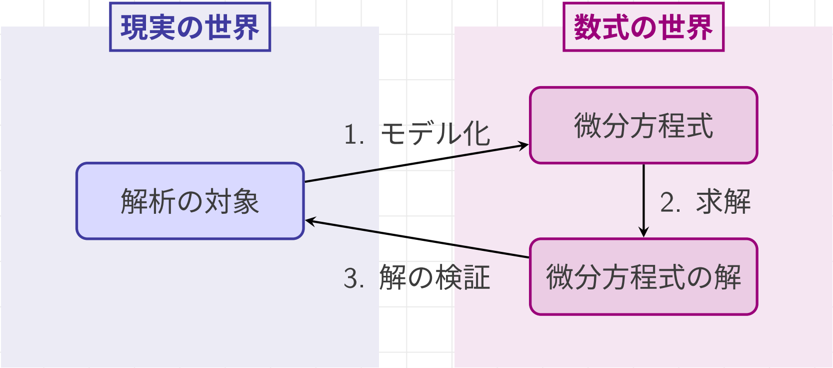

Figure: 微分方程式を用いた解析の流れ

微分方程式を「解く」ということ

今回: 未知関数の関係式が具体的に求まる常微分方程式の解き方を学ぶ

しかし　**解の具体的な形が求まらない微分方程式も存在する (むしろその方が多数派)**

微分方程式を「解く」という言葉には様々な意味がある

- 未知関数の具体的な形 (表示) を知りたい
- 解が存在するかどうかを知りたい
- 解の数値を求めたい
- 解の大まかな振る舞いを知りたい

$\rightsquigarrow$ 一般の議論では，どのような意味で「解きたい」のかを認識しておくことが重要

微分方程式に関する用語 (1/3)

- 未知関数に入っている変数を**独立変数**という．
- 微分方程式に含まれる未知関数の導関数の最高階数を**階数**という．
  階数が n の微分方程式を n **階微分方程式**という．

n 階常微分方程式の一般形

x を独立変数とする未知関数 $y \equiv y(x)$ が満たす n 階微分方程式は，ある関数 F を用いて

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

と書ける．

- 未知関数とその導関数の 1 次式で表される微分方程式を**線形**微分方程式，
  そうでない方程式を**非線形**微分方程式という．

微分方程式に関する用語 (2/3)

- 微分方程式を満たす関数 (たち) を**解**という. (解はひとつとは限らない)
- 任意定数を含む形で表現された解を**一般解**という.
- 任意定数に特定の値を与えて定まった解を**特殊解**という.

$\boxed{\text{例}}$ 未知関数 $y(x)$ に関する 1 階常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = ay \quad (a \text{ は定数})$$

に対して, 一般解と特殊解の一つは次のように表される:

- 一般解: $y = Ce^{ax}$ (C は任意定数)
- 特殊解: $y = e^{ax}$ (C に 1 を代入したもの)

微分方程式に関する用語 (3/3)

- 微分方程式の求解では, 何らかの条件を付けて方程式を解くことが多い.
  例えば, ある定数 x_0 で y が取る値を
  $$y(x_0) = y_0$$
  と指定する. このような条件を**初期条件**という.
- 初期条件を満たす特殊解を求める問題を**初期値問題**という.

例 先の微分方程式に対して, 初期条件 $y(0) = y_0$ を追加した初期値問題
$$\frac{dy}{dx} = ay, \quad y(0) = y_0$$
の解は $y = y_0 e^{ax}$ と定まる.

授業で扱う微分方程式のトピック

1 階微分方程式

- **変数分離形** $\rightsquigarrow$ 今回
- **同次形** $\rightsquigarrow$ 今回
- 1 階線形微分方程式 (斉次，非斉次) $\rightsquigarrow$ 第 10 回
- Bernoulli 型の微分方程式 $\rightsquigarrow$ 第 10 回

高階微分方程式 $\rightsquigarrow$ 第 11 回

- (特殊な) 2 階微分方程式
- 高階線形微分方程式

ラプラス変換を用いた解法 $\rightsquigarrow$ 第 12–14 回

目次

1 階微分方程式と解の存在性

対象とする方程式: 1 階微分方程式

未知関数 $y = y(x)$ に関する 1 階微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

と表される場合の解き方を考える.

疑問 微分方程式を満たす解は存在するのか? 初期値問題の解は一意に定まるのか? 🤔

定理 (Cauchy の基本定理, informal)

$f(x, y)$ が連続かつ y に関する偏導関数が存在するとき，初期条件 $y(x_0) = y_0$ を満たす 1 階微分方程式 (1) の特殊解はただ一つ存在する.

特殊な形の 1 階微分方程式 (変数分離形, 同次形) は積分を用いて解ける (求積法)

変数分離形の 1 階微分方程式の解法

変数分離形

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{2}$$

- $g(y) \neq 0$ を仮定して両辺を $g(y)$ で割ると
$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x).$$
- 両辺の x に関する積分を考えると
$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx.$$
- ここで左辺は積分変数を x から y に変換する置換積分の形になっているため
$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{1}{g(y)}dy$$
と y に関する不定積分に書き換えられる.

- よって積分定数 C を任意の定数として
$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C$$
を満たす関数 $y(x)$ は方程式 (2) の一般解.

- また $g(y_0) = 0$ となる y_0 が存在する場合，定数関数 $y(x) = y_0$ も方程式 (2) の解.

例題

次の 1 階微分方程式の一般解を求めよ:

$$\frac{dy}{dx} = x(1-y^2). \tag{3}$$

- $y \neq \pm 1$ と仮定して両辺を $1-y^2$ で割ると
$$\frac{1}{1-y^2}\frac{dy}{dx} = x.$$
- よって，C を任意定数として
$$\int \frac{1}{1-y^2}dy = \int x dx + C \tag{4}$$
を満たす関数 $y(x)$ は方程式 (3) の一般解である．

- 式 (4) の左辺は部分分数分解を用いて

$$\int \frac{1}{1-y^2}dy = \int \frac{1}{(1-y)(1+y)}dy$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right)dy$$

$$= \frac{1}{2}(-\log|1-y| + \log|1+y|) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right|.$$

- よって式 (4) は次のように書き換えられる:

$$\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = x^2 + 2C$$

- 両辺の指数関数をとると

$$\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = e^{x^2+2C} = e^{x^2}e^{2C}.$$

- $C' = \pm e^{2C}$ と任意定数をおき直すと

$$\frac{1+y}{1-y} = \pm e^{2C} e^{x^2} = C' e^{x^2} \quad (C' \text{ は } 0 \text{ でない任意定数}).$$

- これを y について解くと一般解として次を得る:

$$y(x) = \frac{C' e^{x^2} - 1}{C' e^{x^2} + 1} \quad (C' \text{ は } 0 \text{ でない任意定数}).$$

- また $y = \pm 1$ も方程式 (3) の解であり，特に

$$y = -1 \ \cdots \ C' = 0 \text{とした場合に該当}$$

として一般解に含めることができる.

- よって，最終的に方程式 (3) の一般解は次のようにまとめられる:

$$y(x) = \frac{C' e^{x^2} - 1}{C' e^{x^2} + 1} \quad (C' \text{ は任意定数}), \quad y(x) = 1$$

同次形の 1 階微分方程式の解法

同次形

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5}$$

方針　変数変換により変数分離形に帰着する

- $\boxed{u = \dfrac{y}{x}}$ と変数変換すると, $y = ux$ より

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}.$$

- これを式 (5) に代入すると

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u), \quad \text{すなわち} \quad \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}. \tag{6}$$

となり，これは変数分離形である．

- よって方程式 (6) の一般解 u を求め，$y = ux$ に代入すれば解が得られる．

例題

次の 1 階微分方程式の一般解を求めよ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x+2y}{2x-y}. \tag{7}$$

- 式 (7) の右辺は

$$-\frac{3x+2y}{2x-y} = -\frac{3+\frac{2y}{x}}{2-\frac{y}{x}}.$$

と書けることから，式 (7) は同次形である．

- $u = \dfrac{y}{x}$ とすると $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ であり，これらを式 (7) に代入すると

$$u + x\frac{du}{dx} = -\frac{3+2u}{2-u}.$$

- 式を整理して

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}\left(\frac{3+2u}{2-u} + u\right) = -\frac{1}{x}\cdot\frac{3+2u+u(2-u)}{2-u} = -\frac{1}{x}\cdot\frac{3+4u-u^2}{2-u}. \tag{8}$$

- 方程式 (8) は変数分離形である．
  よって $3+4u-u^2 \neq 0$ の場合，方程式 (8) の一般解は
  $$\int \frac{2-u}{3+4u-u^2}du = -\int \frac{1}{x}dx + C \quad (C \text{ は任意定数}),$$
  すなわち
  $$\frac{1}{2}\log\left|3+4u-u^2\right| = -\log|x| + C.$$
- 両辺の指数関数をとると, $C' = \pm e^{2C}$ と任意定数をおき直して
  $$3+4u-u^2 = \frac{\pm e^{2C}}{x^2} = \frac{C'}{x^2}.$$
- $u = \dfrac{y}{x}$ を代入して, 最終的に
  $$3+4\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{C'}{x^2}.$$

- すなわち,

$$3x^2+4xy-y^2=C' \quad (C' \text{ は } 0 \text{ でない任意定数}) \tag{9}$$

を満たす関数 y が方程式 (7) の一般解となる.

- $3+4u-u^2=0$ の場合, $u=\dfrac{y}{x}$ を代入して得られる式

$$3x^2+4xy-y^2=0$$

を満たす関数 y も方程式 (7) の解である (左辺を x で微分すれば分かる).
これは式 (9) で $C'=0$ とした場合に該当する.

- 以上より, 方程式 (7) の一般解は

$$3x^2+4xy-y^2=C' \quad (C' \text{ は任意定数}) \tag{10}$$

と求まる.

補足 式 (10) は「$y=(x$の式$)$」という形ではないが, x と y の関係式は与えている.
よって式 (10) を一般解としてよい (式 (10) のような表示を**陰関数表示**という).

まとめ

講義の振り返り

- 微分方程式とは何か
- 変数分離形，同次形の解法

自宅での復習

- 微分方程式を用いたモデル化の例を確認する．
- 微分方程式に関する用語の確認する．
- 変数分離形·同次形の解法を再現する．