

# 部分空間と直交性

数理工学 第4回

小林 健 / Ken Kobayashi

東京科学大 工学院 経営工学系

2025年10月16日

# 目次

① 部分空間の和と独立

② 直交補空間

# 目次

① 部分空間の和と独立

② 直交補空間

# 部分空間の和

## 定義 (部分空間の和)

線形空間  $V$  の部分空間  $U, W \subseteq V$  に対して,

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

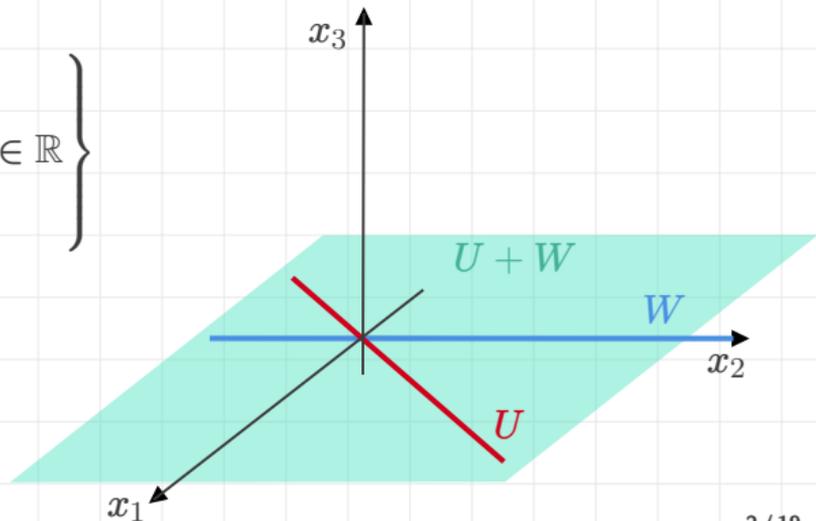
と定義される集合を部分空間の**和 (sum)** という。

例  $\mathbb{R}^3$  の部分空間

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

に対して, その和は

$$U + W = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t + s \\ 0 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$



## 部分空間の和の性質

### 命題 (部分空間の和は部分空間)

部分空間  $U, W \subseteq V$  に対して、それらの和  $U + W$  も部分空間である。

証明  $U + W$  が和とスカラー倍に関して閉じていることを示す。

- $x, y \in U + W$  を任意にとる。このとき

$$x = u_1 + w_1,$$

$$y = u_2 + w_2$$

となる  $u_1, u_2 \in U, w_1, w_2 \in W$  が存在する。

- ここで、 $x + y = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$  であり、和に関して閉じている。
- また任意の  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して、 $\alpha u_1 \in U, \alpha w_1 \in W$  なので

$$\alpha x = \alpha u_1 + \alpha w_1 \in U + W$$

であり、スカラー倍に関して閉じている。よって  $U + W$  は部分空間である。 □

# 和の基底

🤔 部分空間の和の基底は、元の部分空間の基底とどのような関係にあるのか？

- 部分空間  $U, W \subseteq V$  に対し、 $U \cap W$  も部分空間 (各自確認せよ).
- $U \cap W$  の基底を  $v_1, v_2, \dots, v_m$  とする.
- $v_1, v_2, \dots, v_m$  にいくつかのベクトルを加えて、 $U, W$  それぞれの基底を構成する:

$U$  の基底:  $v_1, v_2, \dots, v_m, u_1, u_2, \dots, u_s,$

$W$  の基底:  $v_1, v_2, \dots, v_m, w_1, w_2, \dots, w_t.$

- このとき、基底の和集合

$v_1, v_2, \dots, v_m, u_1, u_2, \dots, u_s, w_1, w_2, \dots, w_t$

は  $U + W$  の基底になっている. (詳細は次ページ)



部分空間の和の基底は元の基底の和集合

## 和の基底の作り方

### 命題 (和の基底は基底の和集合)

部分空間  $U, W \subseteq V$  の基底の和集合

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_s, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_t$$

は  $U + W$  の基底である.

### 証明の方針

- $U + W$  上の任意のベクトルが上記のベクトルの線形結合で表されるのは明らか.  
上記のベクトルの組が線形独立であることを示す.
- $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$  として, 次が成り立つことを示す:

$$\sum_{i=1}^r a_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^t c_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0} \implies \begin{cases} a_i = 0 \ (i = 1, 2, \dots, m), \\ b_i = 0 \ (i = 1, 2, \dots, s), \\ c_i = 0 \ (i = 1, 2, \dots, t). \end{cases} \quad (1)$$

証明

- $\sum_{i=1}^r a_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^t c_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$  とする. このとき

$$\sum_{i=1}^r a_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{u}_i = - \sum_{i=1}^t c_i \mathbf{w}_i. \quad (2)$$

- よって両辺は  $U \cap W$  の元であり, 式 (2) の右辺は  $U \cap W$  の基底  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  の線形結合で表される ( $d_i \in \mathbb{R}$ ):

$$- \sum_{i=1}^t c_i \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^m d_i \mathbf{v}_i$$

- $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_t$  は  $W$  の基底で線形独立なので

$$c_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, t), \quad d_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (3)$$

- 式 (3) を式 (2) に代入すると, 同様の議論で

$a_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s)$  を得て, 式 (1) が示される. □

# 和の次元

先の議論 部分集合の**和の基底**は, 元の部分空間の**基底の和集合**

↪ **和の次元がわかる**

## 定義 (部分空間の次元)

部分空間  $U \subseteq V$  の基底が  $n$  個のベクトルから構成される時,  
 $U$  の**次元 (dimension)** は  $n$  であるといい,  $\dim U = n$  と表す.

注意 基底の個数はその取り方によらず不変である (教科書 p.15 参照)

## 定理 (和の次元)

部分空間  $U, W \subseteq V$  に対して, 次が成り立つ:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$



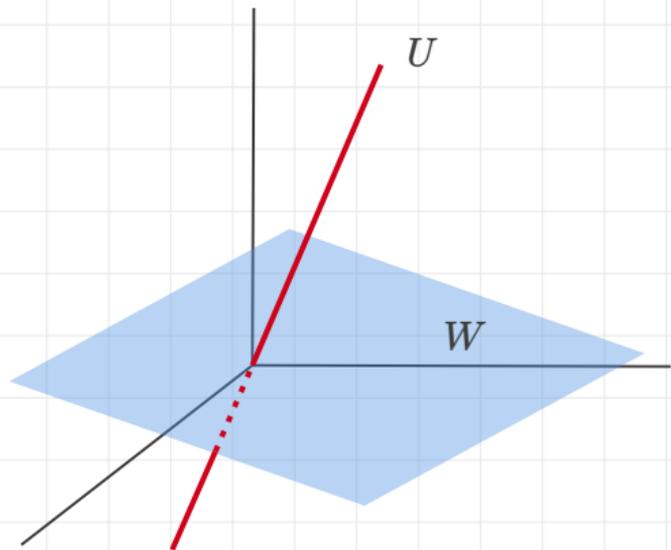
集合の要素の個数のような関係が部分空間の次元でも成り立っている

# 独立と直和

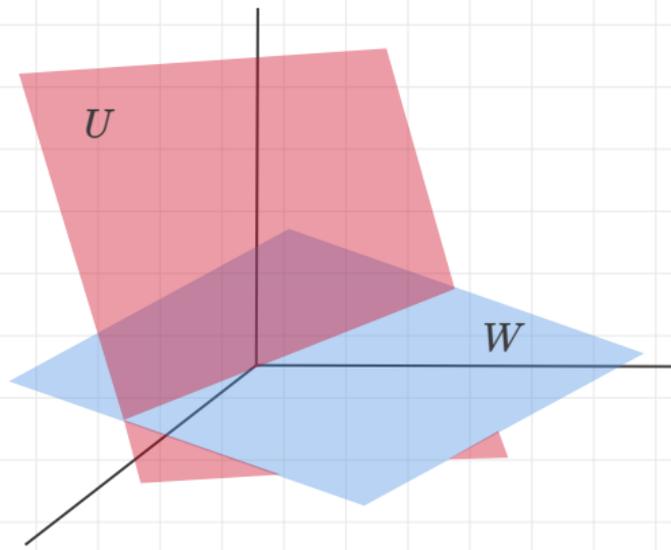
## 定義 (独立と直和)

- 部分空間  $U, W \subseteq V$  に対して,  $U \cap W = \{0\}$  のとき (共通部分がゼロベクトルのみ),  $U$  と  $W$  は**独立 (independent)** であるという.
- 独立な部分空間  $U, W \subseteq V$  に対して, その和を**直和 (direct sum)** といい,  $U \oplus W$  と表す.
- $U \cap W = \{0\}$  のとき,  $\dim(U \cap W) = 0$ .
- したがって, 和の次元に関する定理から部分空間  $U, W$  が独立のとき次が成り立つ:  
$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W.$$
- $U$  の基底:  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ ,  $W$  の基底:  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r$  とすると  
 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r$  は線形独立であり,  $U \oplus W$  の基底である.

## 独立な場合とそうでない場合の概念図



$U$  と  $W$  は独立  
(原点のみで交わる)



$U$  と  $W$  は独立でない  
(原点以外でも交わる)

## 直和における表現の一意性

### 定理 (表現の一意性)

部分空間  $U, W \subseteq V$  が独立のとき, 任意の  $z \in U \oplus W$  に対して,

$$z = \mathbf{u} + \mathbf{w} \quad (\mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W) \quad (4)$$

の表現は一意である.

証明 背理法で示す.

- $\mathbf{u}' \in U, \mathbf{w}' \in W$  を用いて  $z = \mathbf{u}' + \mathbf{w}'$  と表せると仮定 (ただし  $\mathbf{u}' \neq \mathbf{u}$ ).
- 式 (4) から両辺をそれぞれ引いて

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}' = -(\mathbf{w} - \mathbf{w}').$$

- 右辺は  $W$  の元なので,  $(0 \neq) \mathbf{u} - \mathbf{u}' \in U \cap W$  だが, これは  $U, W$  の独立性に矛盾.
- よって  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$  であり,  $z$  の表現は一意である. □

# 目次

① 部分空間の和と独立

② 直交補空間

# 補空間

## 定義 (補空間)

線形空間  $V$  上の独立した部分空間  $U, W \subseteq V$  に対して,

$$V = U \oplus W$$

が成り立つとき,  $U$  を  $W$  の**補空間 (complementary space)** という.

**例**  $\mathbb{R}^2$  の部分空間として  $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$  とする.

- $U_1, U_2$  をそれぞれ次のように定める:

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

- $U_1, U_2$  はどちらも  $W$  と独立で,  $\mathbb{R}^2 = U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$ .
- よって  $U_1, U_2$  はともに  $W$  の補空間.

→ 補空間は複数取れる

# 直交補空間

内積空間では特別な補空間が定まる.

## 定義 (直交補空間)

内積空間  $V$  の部分空間  $W \subseteq V$  に対して,

$$W^\perp := \{v \in V \mid \forall w \in W, (v \cdot w) = 0\}$$

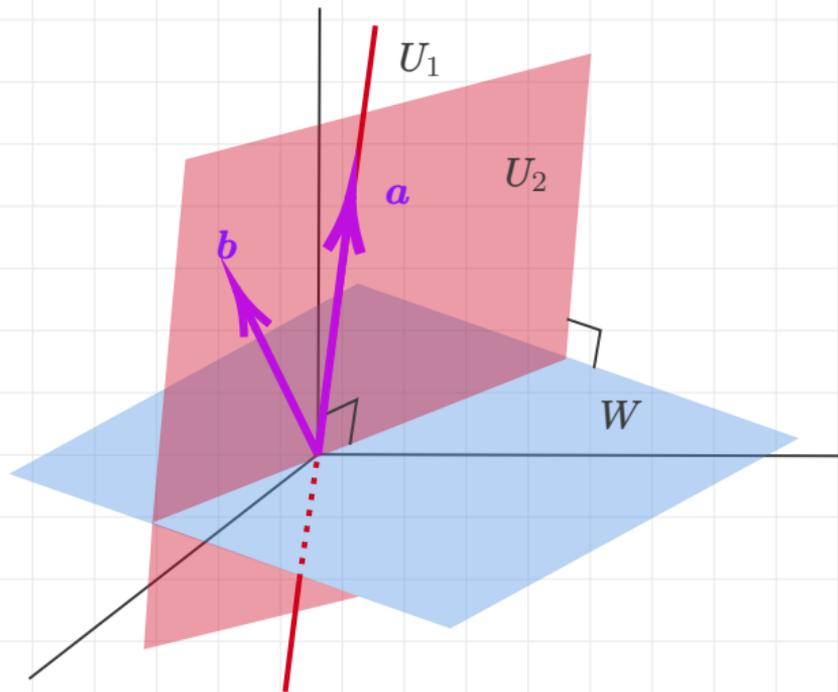
と定義される集合を  $W$  の**直交補空間 (orthogonal complement)** という.

- $W^\perp$  は  $W$  上の任意のベクトルと直交するベクトル全体の集合.
- 直交補空間  $W^\perp$  は部分空間である (各自で確認せよ).

**注意** 直交補空間  $W^\perp$  が  $W$  の補空間であるかは定義からすぐには分からない

↪ 以降の定理で, 直交補空間は補空間であることが示される.

例  $U_1 = \langle \mathbf{a} \rangle$  とする.  $U_1$  の直交補空間は  $W = \{ \mathbf{v} \mid (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) = 0 \}$  である.



- $U_2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  に対して,  $W$  は  $U_2$  の直交補空間ではない.

## 直交補空間は補空間

### 定理 (直交補空間は補空間)

内積空間  $V$  の部分空間  $W \subseteq V$  に対して, 以下が成り立つ:

$$W \cap W^\perp = \{0\}, \quad V = W + W^\perp$$

#### ポイント

- 1 つ目の等式は,  $W$  と  $W^\perp$  が独立であることを意味する.
- 1 つ目と 2 つ目の等式から,  $W^\perp$  は  $W$  の補空間であることがわかる.

$\rightsquigarrow V = W \oplus W^\perp$  と書ける ( $V$  の直和分解という).

## $W \cap W^\perp = \{0\}$ の証明

- $W, W^\perp$  はどちらも部分空間なので,  $\{0\} \subseteq W \cap W^\perp$  は明らか.  
以降では  $W \cap W^\perp \subseteq \{0\}$  を示す.
- $x \in W \cap W^\perp$  を任意にとる.
- このとき,  $x \in W$  かつ  $x \in W^\perp$  であるので,  
$$(x \cdot x) = 0.$$
- よって内積の定義から  $x = 0$  であり,  $W \cap W^\perp \subseteq \{0\}$ .

## 集合の復習

- 2つの集合  $A, B$  に対し,  $A = B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \subseteq B$  かつ  $B \subseteq A$ .

## $V = W + W^\perp$ の証明

- $V \supseteq W + W^\perp$  は明らか. 以降では  $V \subseteq W + W^\perp$  を示す.
- $w_1, w_2, \dots, w_k \in W$  を  $W$  の正規直交基底とする.
- $v \in V$  を任意にとり,  $v$  の  $W$  への射影を  $x \in W$  とすると,  $x$  は

$$x = \sum_{j=1}^k (v \cdot w_j) w_j.$$

と書ける ( $\because$  正規直交基底を用いた射影).

- $y := v - x$  とおく. このとき  $w_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) に対して

$$\begin{aligned} (y \cdot w_i) &= ((v - x) \cdot w_i) \\ &= (v \cdot w_i) - (x \cdot w_i) \\ &= (v \cdot w_i) - \sum_{j=1}^k (v \cdot w_j) (w_j \cdot w_i) = (v \cdot w_i) - (v \cdot w_i) = 0. \end{aligned}$$

- よって  $y \in W^\perp$  であり,  $v = x + y \in W + W^\perp$ . したがって  $V \subseteq W + W^\perp$  である.  $\square$

## 定理 (実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ 上での直和分解)

$\mathbb{R}^n$  の部分空間  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  の直交補空間を  $U$  とする.  $v \in \mathbb{R}^n$  の  $W, U$  それぞれへの射影を  $x \in W, y \in U$  とすると次が成り立つ:

$$v = x + y.$$

**証明**  $W$  の正規直交基底:  $w_1, w_2, \dots, w_k$ ,  $U$  の正規直交基底:  $u_1, u_2, \dots, u_{n-k}$  として,

$$A := (w_1, w_2, \dots, w_k), \quad B := (u_1, u_2, \dots, u_{n-k}).$$

- 行列  $A, B$  を用いて  $v$  の  $W, U$  それぞれへの射影  $x, y$  は, 次のように書ける:

$$x = AA^T v, \quad y = BB^T v.$$

- $w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_{n-k}$  は  $\mathbb{R}^n$  の正規直交基底であるので,  $A$  と  $B$  を横に並べて

$$P := (A, B) = (w_1, w_2, \dots, w_k, u_1, u_2, \dots, u_{n-k})$$

と定義される行列  $P$  は直交行列である.

- 直交行列の性質から

$$I = PP^T = (A, B) \begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} = AA^T + BB^T.$$

- よって

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (AA^T + BB^T)\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

となり，証明が完了する.



# まとめ

## 講義の振り返り

- 部分空間の和の定義とその性質
- 独立と直和の定義
- 直交補空間と直和分解

## 自宅での復習

- 部分空間の定義，次元の定義を復習する．
- 和の基底の構成方法を確認する．
- 直交補空間の性質に関する証明の流れを確認する．